ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.B	4.B	5.B	6.A	7.C	8.B	9.B	10.C
11.D	12.B	13.A	14.B	15.C	16.B	17.D	18.A	19.D	20.A
21.B	22.C	23.C	24.D	25.A	26.C	27.A	28.C	29.A	30.B
31.D	32.A	33.D	34.C	35.C	36.B	37.D	38.D	39.A	40.C
41.C	42.B	43.A	44.D	45.B	46.B	47.A	48.A	49.C	50.B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Có bao nhiêu cách trao 4 phần quà khác nhau cho 4 học sinh?

A. 8. **B.** 256. **C.** 16. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

Mỗi cách trao 4 phần quà khác nhau cho 4 học sinh là một hoán vị của 4 phần tử.

Vậy có $4! = 24$ cách.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_2 = 8$ và công bội $q = 3$. Số hạng đầu tiên u_1 của cấp số nhân đã cho bằng

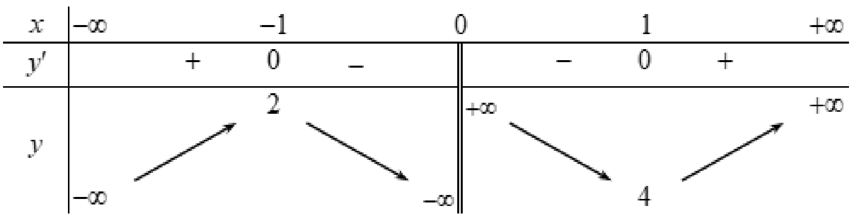
A. 24. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 5. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_2 = u_1.q \Rightarrow u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{8}{3}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=0$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-2$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có y' đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và giá trị cực đại là $y=1$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có $f'(x)$ đổi dấu một lần từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua $x=1$ nên hàm số có 1 cực trị.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ là đường thẳng:

A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=2$. **D.** $y=1$.

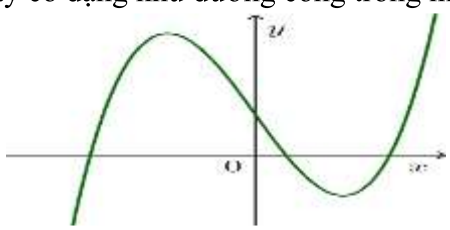
Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$

nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^2+3x-1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$. **C.** $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=x^4-x^2+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Đồ thị có nhánh cuối cùng có hướng đi lên $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên hệ số a dương, do đó hàm số cần chọn $y=x^3-3x+1$.

Câu 8. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + 4$ với đường thẳng $y = 4$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$x^3 - x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm là 3.

Câu 9. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_a \sqrt{a}$

A. $P = -2$. **B.** $P = \frac{1}{2}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P = \log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a a = \frac{1}{2}$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ là

A. $y' = x \ln x$. **B.** $y' = x$. **C.** $y' = \frac{1}{x}$. **D.** $\ln x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}$ bằng

A. $a^{\frac{5}{3}}$. **B.** $a^{\frac{5}{2}}$. **C.** $a^{\frac{6}{5}}$. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[3]{a^{\frac{5}{2}}} = a^{\frac{5}{6}}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $4^{x-2} = 8$ là

A. $x = \frac{3}{2}$. **B.** $x = \frac{7}{2}$. **C.** $x = \frac{1}{2}$. **D.** $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^{x-2} = 8 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^{x-2} = 2^3 \Leftrightarrow 2^{2(x-2)} = 2^3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 3 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\log_3(7x - 5) = 2$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $7x-5>0 \Leftrightarrow x>\frac{5}{7}$.

Ta có $\log_3(7x-5)=2 \Rightarrow 7x-5=9 \Leftrightarrow x=2$. Kết hợp điều kiện ta được $x=2$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $y=\sin(2021x)$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}\cos(2021x)+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2021}\cos(2021x)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2021\cos(2021x)+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-2021\cos(2021x)+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin(2021x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2021}\cos(2021x)+C$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=e^{3x-1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $3e^{3x-1}+C$. **B.** $\frac{-1}{3}e^{3x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$. **D.** $e^{3x-1}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^{3x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$.

Câu 16. Nếu $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=-7$ và $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** -10. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx=\int_1^5 f(x)dx-\int_2^5 f(x)dx=-7-3=-10.$

Câu 17. Tích phân $\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{x+2}dx$ bằng

A. $\frac{-7}{2}+13\ln\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{-7}{2}-13\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}+13\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{-7}{2}+13\ln\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{x+2}dx=\int_0^1\left(x-4+\frac{13}{x+2}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-4x+13\ln(x+2)\right)\right|_0^1=\frac{-7}{2}+13\ln\frac{3}{2}$.

Câu 18. Cho số phức $\bar{z}=4-3i$. Vậy số phức z là

A. $4+3i$. **B.** $-4+3i$. **C.** $-4-3i$. **D.** $3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\bar{z}=4-3i \Rightarrow z=4+3i.$

Câu 19. Cho hai số phức $z_1=1+3i$ và $z_2=2i-3$. Số phức $\frac{z_1}{z_2}$ bằng

A. $\frac{-3-11i}{13}$. **B.** $-\frac{3-11i}{13}$. **C.** $\frac{3+11i}{13}$. **D.** $\frac{3-11i}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3i}{2i-3}=\frac{3-11i}{13}$.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ , điểm $M(2;5)$ được biểu diễn bởi số phức z là

A. $z=2+5i$. **B.** $z=2-5i$. **C.** $z=5+2i$. **D.** $z=5-2i$.

Lời giải

Chọn A

Từ điểm $M(2;5)$ ta biểu diễn được bởi số phức $z=2+5i$.

Câu 21. Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $5\,\text{cm}^2$ và chiều cao bằng $9\,\text{cm}$. Thể tích khối chóp đó bằng

A. $45\,\text{cm}^2$. **B.** $15\,\text{cm}^3$. **C.** $15\,\text{cm}^2$. **D.** $45\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.5.9=15\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 22. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có $AC=2a\sqrt{2}$. Thể tích của khối lập phương đó là

A. $16\sqrt{2}a^3$. **B.** $8\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $16a^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=2a \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB^3=8a^3$.

Câu 23. Cho khối cầu có đường kính $2r$. Thể tích khối cầu đó là

A. $\frac{32\pi r^3}{3}$. **B.** $32\pi r^3$. **C.** $\frac{4\pi r^3}{3}$. **D.** $4\pi r^3$.

Lời giải

Chọn C

Câu 24. Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh bằng 6 và đường kính đáy bằng 4. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. 24π. **B.** 24. **C.** 48π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn D

Bán kính đáy: $r=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow S_{xq}=\pi rl=\pi.2.6=12\pi$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;3)$ và $B(2;0;-1)$. Tìm tọa độ điểm C biết B là trung điểm của AC.

A. $(5;-2;-5)$. **B.** $(5;2;5)$. **C.** $(-4;4;7)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có B là trung điểm của AC nên

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \\ y_A + y_C = 2y_B \\ z_A + z_C = 2z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + x_C = 2.2 \\ 2 + y_C = 2.0 \\ 3 + z_C = 2.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = -2 \\ z_C = -5 \end{cases} \Rightarrow C(5;-2;-5).$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(1;0;2)$, $R = 2$. **B.** $I(-1;0;2)$, $R = \sqrt{5}$.

C. $I(1;0;-2)$, $R = 2$. **D.** $I(1;-2;0)$, $R = 2$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 - 1} = 2$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(-3;2;4)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x - 3y + z + 12 = 0$

A. $x - 3y + z + 5 = 0$. **B.** $x - 3y + z - 5 = 0$. **C.** $x - 3y + z - 12 = 0$. **D.** $-3x + 2y + 4z = 0$.

Lời giải

Chọn A

(P) song song với mặt phẳng (Q) $\Rightarrow (P): x - 3y + z + m = 0$ $(m \neq 12)$.

Theo giả thiết $A(-3;2;4) \in (P)$ nên ta có $-3 - 3.2 + 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 5$ (thỏa).

Vậy $(P): x - 3y + z + 5 = 0$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng (d) vuông góc với hai đường thẳng a và b:

$(a): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$, $(b): \frac{x-3}{2} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-5}{4}$. Tìm tọa độ vectơ chỉ phương của (d).

A. $(14;0;7)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(2;0;-1)$. **D.** $(2;1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng a có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_a} = (1;2;2)$.

Đường thẳng b có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_b} = (2;-3;4)$.

(d) vuông góc với hai đường thẳng a và b nên (d) nhận $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_a};\overrightarrow{u_b}\right]=(14;0;-7)$ làm một vectơ chỉ phương $\Rightarrow \vec{k}=\dfrac{1}{7}\vec{u}=(2;0;-1)$ cũng là một vectơ chỉ phương của (d).

Câu 29. Nhà bóng của một khu trò chơi dành cho thiếu nhi chứa 2021 quả bóng được đánh số từ 1 đến 2021. Một em bé bước vào và lấy 2 quả để chơi ném bóng. Tính xác suất để em chọn được 2 quả đều có số thứ tự là số chẵn?

A. $\dfrac{C_{1010}^2}{C_{2021}^2}$. **B.** $\dfrac{1010}{2021}$. **C.** $\dfrac{1011}{2021}$. **D.** $\dfrac{C_{1011}^2}{C_{2021}^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $n(\Omega)=C_{2021}^2$.

Gọi A là biến cố cần tìm. Khi đó, ta có $n(A)=C_{1010}^2 \Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{1010}^2}{C_{2021}^2}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai thỏa $f''(x)=2x-3$ và $f'(5)=12$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\int f''(x)dx=\int(2x-3)dx=x^2-3x+C$.

Theo giả thiết: $f'(5)=12 \Rightarrow 12=5^2-3.5+C \Rightarrow C=2$.

Vậy $f'(x)=x^2-3x+2$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 31. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=-x^4+2x^2$ trên đoạn $[-2;2]$.

A. -1. **B.** 8. **C.** 1. **D.** -8.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)=-x^4+2x^2$ trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2;2] \\ x = 1 \in [-2;2] \\ x = -1 \in [-2;2] \end{array}\right.$

Ta có $f(-2) = -8;\ f(-1) = 1;\ f(0) = 0;\ f(1) = 1;\ f(2) = -8$.

Vậy $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = -8$.

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là

A. $\left(\frac{1}{2};1\right]$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases} x > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}} x \le \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow x \ge 2x-1 \Leftrightarrow x \le 1$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm là $\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 33. Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 3$, khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + x^2\Big|_0^1 = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2$.

Câu 34. Môđun của số phức $\omega = z + z^2$, với z là số phức thỏa mãn $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i$ là.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i \Leftrightarrow z = 2-i \Rightarrow z^2 = 3-4i$.

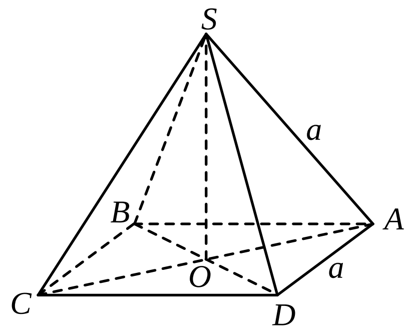
$\Rightarrow \omega = 5-5i \Rightarrow |\omega| = 5\sqrt{2}$.

Câu 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đáy có tâm là O và $SA = a,\ AB = a$. Khi đó, khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAD) bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn C

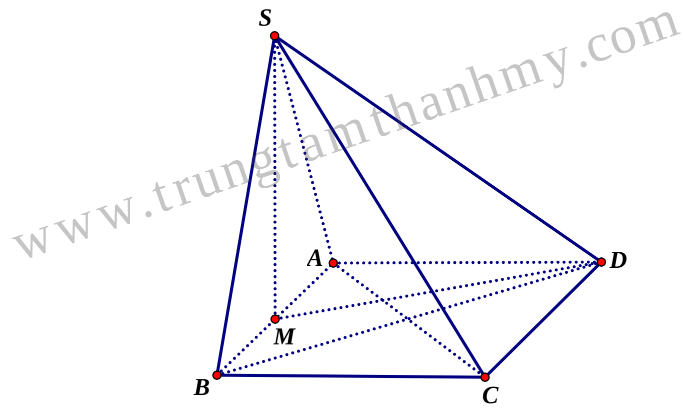


Ta có : $V_{S.ABCD} = (AB)^3 \dfrac{\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_{S.AOD} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

$S_{SAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $d\left[O,(SAD)\right] = \dfrac{3.V_{SAOD}}{S_{SAD}} = \dfrac{3.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ gọi M là trung điểm cạnh AB. Biết đáy là hình vuông cạnh bằng a, $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ).



Kí hiệu φ góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan\varphi$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì tam giác SAB đều nên M là trung điểm của AB và $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\varphi = \left(SD,(ABCD)\right) = \left(SD, DM\right) = SDM$, $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Mặt khác, $\tan SDM = \dfrac{SM}{MD} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;0)$, $B(2;-1;2)$. Phương trình của mặt cầu có đường kính AB là

A. $x^2+y^2+(z-1)^2=\sqrt{24}$. **B.** $x^2+y^2+(z-1)^2=\sqrt{6}$.

C. $x^2+y^2+(z-1)^2=24$. **D.** $x^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB khi đó $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=0 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=0 \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;0;1)$.

$IA=\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{6}$.

Mặt cầu đường kính AB nhận điểm $I(0;0;1)$ làm tâm và bán kính $R=IA=\sqrt{6}$ có phương trình là: $x^2+y^2+(z-1)^2=6$.

Câu 38. Đường thẳng đi qua điểm $M(3;2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):2x-5y+4=0$ có phương trình là

A. $(d):\begin{cases} x=3-2t \\ y=2-5t \\ z=1 \end{cases}$. **B.** $(d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=2+5t \\ z=1 \end{cases}$. **C.** $(d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-5t \\ z=t \end{cases}$. **D.** $(d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-5t \\ z=1 \end{cases}$.

Lời giải

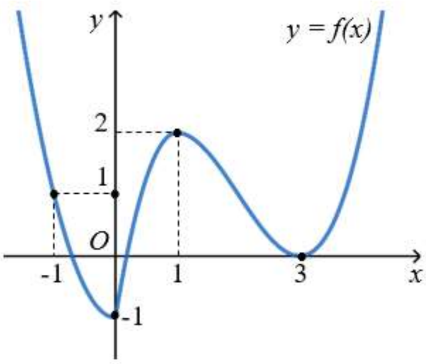
Chọn D

Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (P)

Ta có $d\perp(P)\Rightarrow \vec{u}_d=\vec{n}_{(P)}=(2;-5;0)$

$(d):\begin{cases} Qua\ M(3;2;1) \\ \vec{u}_d=(2;-5;0) \end{cases} \Rightarrow (d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-5t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=\sqrt{|f(x)+m|}$ trên đoạn $[-1;3]$ nhỏ hơn hoặc bằng $2\sqrt{505}$.



Giá trị của S bằng

A. -2019. **B.** 2018. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

◆Ycbt: $g(x)=\sqrt{|f(x)+m|}\le 2\sqrt{505}$; $\forall x\in[-1;3]\Leftrightarrow |f(x)+m|\le 2020$; $\forall x\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow -2020\le f(x)+m\le 2020$; $\forall x\in[-1;3]\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge -2020-m \\ f(x)\le 2020-m \end{cases}$; $\forall x\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{[-1;3]} f(x)\ge -2020-m \\ \max\limits_{[-1;3]} f(x)\le 2020-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\ge -2020-m \\ 2\le 2020-m \end{cases} \Leftrightarrow -2019\le m\le 2018$.

$m\in \mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2019;-2018;\ldots;2017;2018\}$

◆ $S=\sum\limits_{-2019}^{2018} m=-2019$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x+1}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-y\right)<0$?

A. 59149. **B.** 59050. **C.** 59049. **D.** 59048

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$ thì ta có bất phương trình $\left(3t-\sqrt{3}\right)(t-y)<0\Leftrightarrow \left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(t-y)<0$ (1)

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $y>\frac{\sqrt{3}}{3}$, do đó bất PT (1) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}<t<y\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}<3^x<y\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\log_3 y$.

Do mỗi giá trị $y\in\mathbb{N}^*$ có không quá 10 số nguyên của $x\in\left(-\frac{1}{2};\log_3 y\right)$ nên

$0\le \log_3 y\le 10\Leftrightarrow 1\le y\le 3^{20}=59049$.

Suy ra $y\in\{1;2;3....;59049\}$.

Vậy có 59049 giá trị nguyên dương của y.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} e^x+m & \text{khi } x\ge 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$ liên tục trên **R** và $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=ae+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến Ta có

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x+m\right)=m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$ và $f(0)=m+1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên **R** nên liên tục tại $x=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ hay $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 2x\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1}(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{3+x^2}\mathrm{d}(3+x^2) + \int\limits_{0}^{1}(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{3}(3+x^2)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^{0} + (\mathrm{e}^x - x)\Big|_0^1 = \mathrm{e} + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}$.

Suy ra $a = 1$, $b = 2$, $c = -\frac{22}{3}$. Vậy tổng $a + b + 3c = -19$.

Câu 42. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b $\in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = a + 3b$.

A. $S = \frac{7}{3}$. **B.** $S = -5$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = a + bi$,a,b $\in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện đề bài ta có :

$z + 1 + 3i - |z|i = 0 \Leftrightarrow a + bi + 1 + 3i - \sqrt{a^2+b^2}.i = 0$

$\Leftrightarrow (a+1) + (b + 3 - \sqrt{a^2+b^2}).i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 & (1) \\ b+3=\sqrt{a^2+b^2} & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được:

$b + 3 = \sqrt{b^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3 \geq 0 \\ (b+3)^2 = b^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ b^2+6b+9=b^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq -3 \\ b = -\frac{4}{3} \text{ (t/m)} \end{cases}$.

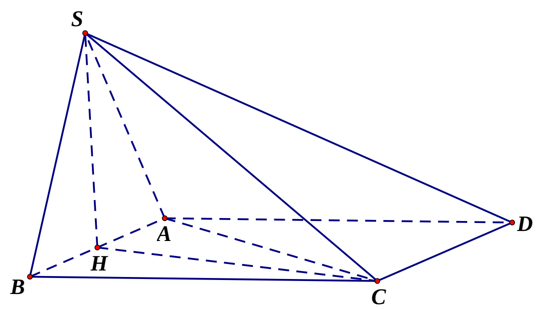
Do đó $a = -1$ và $b = -\frac{4}{3}$. Vậy $S = -1 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) = -5$.

Câu 43. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tam giác ABC đều nên $CH \perp AB$, mà $CD // AB \Rightarrow CH \perp CD$ (1).

Có $CD = (SCD) \cap (ABCD)$ (2)

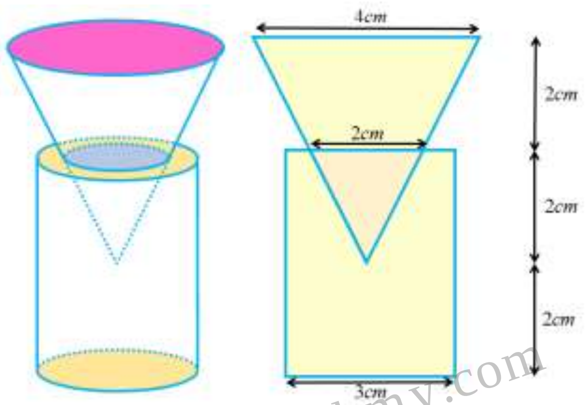
Có $\begin{cases} CD \perp CH \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC \qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\left((SCD);(ABCD)\right) = (SC;CH) = SCH = 45°$.

Trong tam giác SCH có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

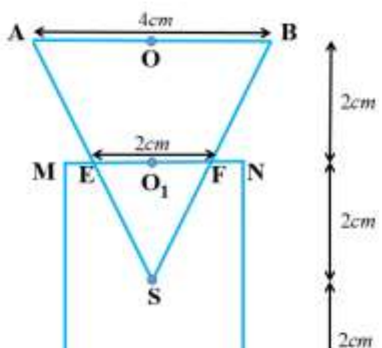
Câu 44. Một nút chai thủy tinh là khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên dưới. Tính thể tích V của (H).



A. $V = 23\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $V = 13\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $V = 17\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $V = \dfrac{41\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi tên các điểm trên thiết diện của (H) khi cắt bởi mặt phẳng chứa trục của (H) như hình vẽ. Khối nón sinh bởi tam giác SAB khi quay quanh trục OS có chiều cao $OS = 4\,cm$, bán kính đáy $OA = 2\,cm$ nên có thể tích V_1 là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2.OS = \dfrac{16\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

Khối nón sinh bởi tam giác SEF khi quay quanh trục O_1S có chiều cao $O_1S = 2\,cm$, bán kính đáy $O_1E = 1\,cm$ nên có thể tích V_2 là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.O_1E^2.O_1S = \dfrac{2\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

Khối trụ sinh bởi hình chữ nhật $MNPQ$ khi quay quanh trục O_1O_2 có chiều cao $O_1O_2 = 4\,cm$, bán kính đáy $O_1M = 1,5\,cm$ nên có thể tích V_3 là $V_3 = \pi.O_1M^2.O_1O_2 = 9\pi\left(cm^3\right)$.

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay (H). Ta có: $V = V_1 + V_3 - V_2 = \frac{41\pi}{3}(cm^3)$.

Vậy $V = \frac{41\pi}{3}(cm^3)$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $\Delta_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho AB là ngắn nhất. Phương trình đường thẳng d là:

A. $x+1 = y+2 = z+2$.

B. $x-1 = y-2 = z-2$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Do d cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại A, B ta có $A(-1+u; -2+2u; u)$, $B(2+2v; 1+v; 1+v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3+2v-u; 3+v-2u; 1+v-u)$

Có $(P): x+y-2z+5=0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (1;1;-2)$.

Đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow 3+2v-u+3+v-2u-2-2v+2u=0 \Leftrightarrow u = v+4$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (v-1; -v-5; -3)$

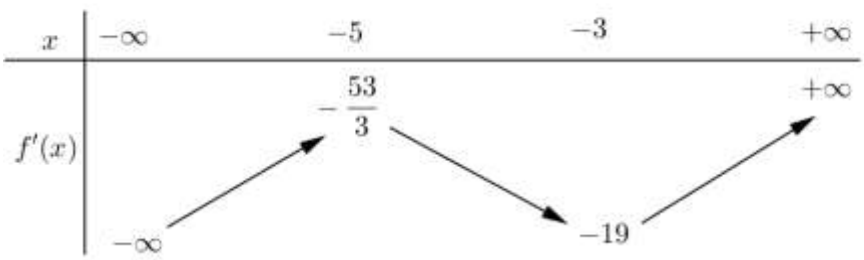
$\Rightarrow AB^2 = (v-1)^2 + (-v-5)^2 + 9 = 2v^2 + 8v + 35 \geq 27\ \forall v \in \mathbb{R}$; $AB^2 = 27$ khi $v = -2$.

Suy ra AB là ngắn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi $v=-2, u=2$.

Như vậy: $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;-3)$, $A(1;2;2)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $x-1 = y-2 = z-2$.

Câu 46. Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x) = \left| f(x^5) - x - 2 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.
B. 3.
C. 4.
D. 2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f'(x)$ là hàm bậc ba, đạt cực trị tại các điểm $x=-5$ và $x=-3$ nên ta có:

$$f''(x)=a(x+3)(x+5)=a\left(x^2+8x+15\right)\Rightarrow f'(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x\right)+d$$

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases} f'(-5)=-\dfrac{53}{3} \\ f'(-3)=-19 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ d=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x-1=\frac{1}{3}x\left(x^2+4x+15\right)-1$$

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^5\right)-x-2$

$h'(x)=5x^4f'\left(x^5\right)-1$

$h'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(x^5\right)=\dfrac{1}{5x^4}$ (1) (do $x=0$ không thỏa mãn phương trình)

- Nếu $x<0$ thì $f'(x)<0$ nên $f'\left(x^5\right)<0\,\forall x<0\Rightarrow(1)$ không có nghiệm trên $(-\infty;0)$.
- Nếu $x>0$:

Từ bảng biến thiên$\Rightarrow$Hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow$Hàm số $f'\left(x^5\right)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

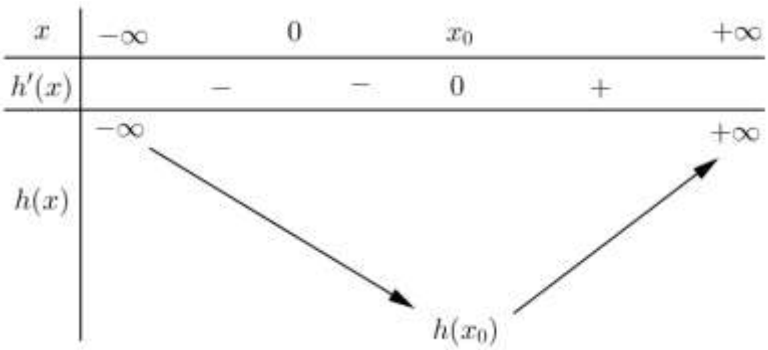
Dễ thấy hàm số $y=\dfrac{1}{5x^4}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow(1)$ có tối đa một nghiệm trên $(0;+\infty)$

Lại có: $\lim\limits_{x\to0^+}\left[f'\left(x^5\right)-\dfrac{1}{5x^4}\right]=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f'\left(x^5\right)-\dfrac{1}{5x^4}\right]=+\infty$; hàm số $u(x)=f'\left(x^5\right)-\dfrac{1}{5x^4}$ liên tục trên $(0;+\infty)\Rightarrow(1)$ có ít nhất một nghiệm trên $(0;+\infty)$

Do đó (1) có đúng một nghiệm $x_0\in(0;+\infty)$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^5\right)-x-2$:



Do $h(0)=-2<0$ nên $h(x_0)<0$

$\Rightarrow$Phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$Hàm số $g(x)=|h(x)|=\left|f\left(x^5\right)-x-2\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 47. Hỏi có bao nhiêu số nguyên y sao cho mỗi giá trị của y có không quá 2021 số nguyên x thỏa mãn $\log_2\left(x+y^2+1\right)-3^{y^2+y-3x}<0$?

A. 110. **B.** 111. **C.** 109. **D.** 108.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-3^{-3t+2y^2+y+3}$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+3.3^{-3t+2y^2+y+3}.\ln 3>0\,\forall t\in(0;+\infty)$

$\Rightarrow$Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do có không quá 2021 số nguyên x nên có không quá 2021 số nguyên của t

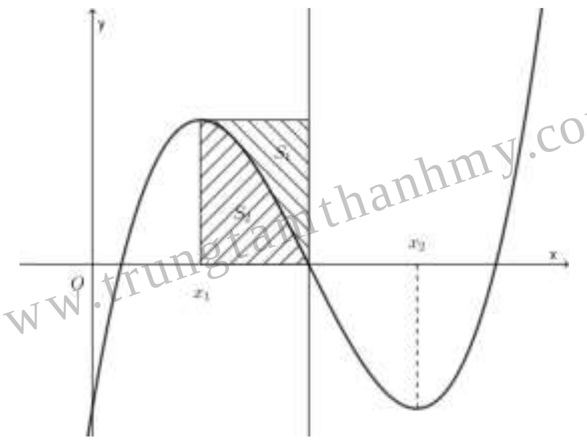
$\Rightarrow t$ nguyên thuộc $[1;2021]$ thì $f(t)<0$ và $f(2022)>0$

$\Leftrightarrow \log_2 2022-3^{2y^2+y-6060}\ge 0 \Leftrightarrow 2y^2+y-6060-\log_3(\log_2 2022)\le 0$

Do y nguyên nên $y\in\{-55;-54;...;54\}$.

Vậy có 110 số nguyên y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

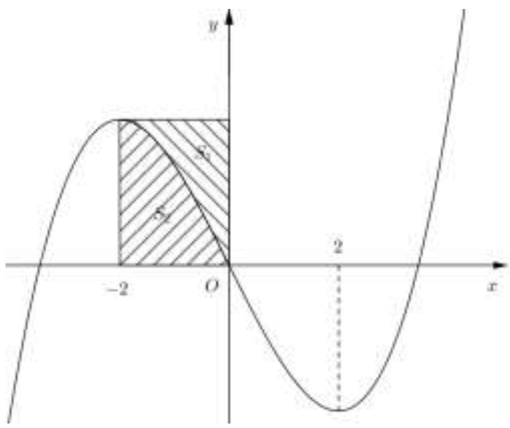
Câu 48. Cho $f(x)$ là hàm bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1; x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+4$ và tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành. Gọi S_1; S_2 là diện tích hình phẳng như trong hình vẽ. Tỷ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là điểm uốn của đồ thị hàm số

Tịnh tiến đồ thị theo vector $\overrightarrow{IO}$ ta được đồ thị hàm số $y=g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3=-2$, $x_4=1$.

$\Rightarrow g'(x)=3a(x+2)(x-2)=3a(x^2-4)$ với $a\neq 0$.

Từ đó ta có $g(x)=a(x^3-12x)+d$.

Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $d=0\Rightarrow g(x)=a(x^3-12x)$.

Ta có $S_2=\int\limits_{-2}^{0}a(x^3-12x)\mathrm{d}x=a\left(\frac{x^4}{4}-6x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}=20a$.

Lại có: S_1+S_2 bằng diện tích của hình chữ nhật có các cạnh là 2 và $g(-2)=16a$

$\Rightarrow S_1+S_2=32a$. Do đó $S_1=32a-20a=12a$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{12a}{20a}=\frac{3}{5}$.

Câu 49. Xét hai số phức z_1; z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2021$ z_2 và $|2z_1+2z_2|=\left|2021\sqrt{3}-2021i\right|$. Giá trị lớn nhất của $P=\left|z_1-z_2+6\sqrt{2}-3i\right|$ bằng

A. $2021\sqrt{3}$. **B.** $3+2021\sqrt{3}$. **C.** $9+2021\sqrt{3}$. **D.** $1+2021\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f'(x)$ là hàm bậc ba, đạt cực trị tại các điểm $x=-5$ và $x=-3$ nên ta có:

$f''(x)=a(x+3)(x+5)=a(x^2+8x+15)\Rightarrow f'(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x\right)+d$

Từ bảng biến thiên ta có: $\begin{cases}f'(-5)=-\frac{53}{3}\\ f'(-3)=-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ d=-1\end{cases}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^3+4x^2+15x-1=\frac{1}{3}x(x^2+4x+15)-1$

Xét hàm số $h(x)=f(x^5)-x-2$

$h'(x)=5x^4f'(x^5)-1$

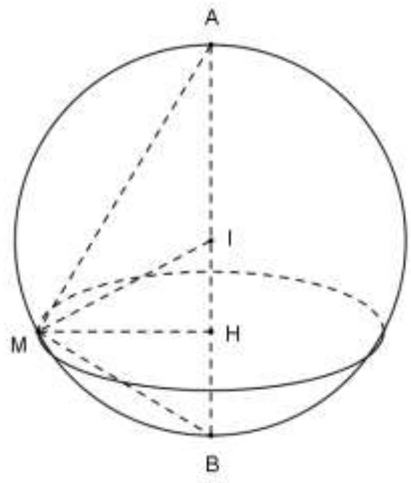
$h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x^5)=\frac{1}{5x^4}$ (1) (do $x=0$ không thỏa mãn phương trình)

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;2;8)$ và $B(-2;-6;-2)$. Xét khối nón (N) có đỉnh A, đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính AB. Khi khối nón (N) có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của khối nón (N) có phương trình dạng $3x+by+cz+d=0$. Giá trị của $b+c+d$ bằng:

A. 47. **B.** $\frac{47}{3}$. **C.** $-\frac{47}{3}$. **D.** -47.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt nón (N) có đường tròn đáy có tâm H bán kính r; chiều cao $AH = h$; mặt cầu đường kính AB có tâm I, bán kính $R = \frac{1}{2}AB = 5\sqrt{2} \Rightarrow I$ là trung điểm AB.

Mặt phẳng cần tìm là (P). Dễ thấy $AB \perp (P)$.

Lấy M bất kỳ thuộc đường tròn đáy của hình nón. Dễ thấy tam giác ABM ABM vuông tại M và $HM^2 = HA.HB \Leftrightarrow r^2 = h.(AB - h) = h.\left(10\sqrt{2} - h\right)$.

Thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2.\left(10\sqrt{2} - h\right) = \frac{1}{6}\pi h^2.\left(20\sqrt{2} - 2h\right) \le \frac{1}{6}\pi\left(\frac{h + h + 20\sqrt{2} - 2h}{3}\right)^3 = \frac{8000\sqrt{2}}{81}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow h = \frac{20\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}AB \Leftrightarrow AH = \frac{2}{3}AB \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow H\left(0; -\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$

Mặt phẳng (P) đi qua $H\left(0; -\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$ và nhận vector $\overrightarrow{AB} = (-6; -8; -10)$ có phương trình là:

$-6(x - 0) - 8\left(y + \frac{10}{3}\right) - 10\left(z - \frac{4}{3}\right) = 0$ hay $3x + 4y + 5z + \frac{20}{3} = 0$.

$\Rightarrow b = 4$; $c = 5$; $d = \frac{20}{3}$.

Vậy $b + c + d = \frac{47}{3}$.